Погрешности при решении задач.

Пусть a - точное (истинное) числовое значение некоторой величины, а $\overline{a}$ - её приближённое значение, тогда число

$$\Delta(\overline{a}) = |a - \overline{a}|$$

называют истинной абсолютной погрешностью приближённого числа $\overline{a}$.

Если точное значение a неизвестно; то работаем с величиной

$$\Delta(\overline{a}) \geq |a - \overline{a}|$$

которая называется предельной абсолютной погрешностью числа $\overline{a}$ (или просто абсолютной погрешностью).

Число

$$\delta(\overline{a}) = \left| \frac{a - \overline{a}}{a} \right|$$

называется относительной погрешностью приближённого числа $\overline{a}$.

Если точное значение величины неизвестно, а истинная абсолютная погрешность Δ мала по сравнению с $|\overline{a}|$, то используем формулу: $\delta \approx \dfrac{\Delta}{|\overline{a}|}$.

В записи приближённых чисел абсолютная и относительная погрешности указываются так:

$$x = \overline{x} \pm \Delta; \quad x = \overline{x} \cdot (1 \pm \delta).$$

При сложении и вычитании абсолютные погрешности складываются, а при делении и умножении складываются относительные погрешности.

Вычислить приближённое число с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую на n-м разряде после запятой.

1) Число $14{,}75$ найдено с относительной погрешностью $0{,}5$ %. Найти абсолютную погрешность округления.

Обозначим:

a - точное число (неизвестно),

$\overline{a} = 14{,}75$ - приближённое число,

$\delta = 0{,}005$ - относительная погрешность приближённого числа $\overline{a}$,

Δ - абсолютная погрешность округления (истинная).

Погрешность мала, поэтому используем формулу

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|a|}$$

$$0{,}005 \approx \frac{\Delta}{14{,}75}$$

$$\Delta \approx 0{,}005 \cdot 14{,}75 = 0{,}07375$$

Ответ: $\Delta \approx 0{,}07375$.

Литература:

1) Кремер Н.Ш. “Высшая математика для экономических специальностей”, 2006, стр. 258.

2) Найти абсолютные и относительные погрешности числа $e = 2{,}71828182\ldots$, заданного двумя и трёмя цифрами после запятой (без округления !).

а)

Число $x = e$ задано двумя цифрами после запятой: $\overline{x} = 2{,}71$.

Абсолютная погрешность: $|x - \overline{x}| = |e - 2{,}71| \le 0{,}009 = \Delta$,

$$e = \overline{x} \pm \Delta = 2{,}71 \pm 0{,}009$$

Относительная погрешность: $\delta = \dfrac{\Delta}{\overline{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}009}{2{,}71} \cdot 100\% \approx 0{,}332\%$

$$e = 2{,}71 \;\; (100 \pm 0{,}332\%)$$

или в долях

$$e = 2{,}71 \;\; (1 \pm 0{,}00332)$$

б)

Число $x = e$ задано трёмя цифрами после запятой: $\overline{x} = 2{,}718$.

Абсолютная погрешность: $|x - \overline{x}| = |e - 2{,}718| \le 0{,}0003 = \Delta$,

$$e = \overline{x} \pm \Delta = 2{,}718 \pm 0{,}0003$$

Относительная погрешность: $\delta = \dfrac{\Delta}{\overline{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}0003}{2{,}718} \cdot 100\% \approx 0{,}011\%$

$$e = 2{,}718 \;\; (100 \pm 0{,}011\%)$$

или в долях

$$e = 2{,}718 \;\; (1 \pm 0{,}00011)$$

3) Округлить число $x = 4{,}45575650$ до шести, пяти и т.д. десятичных знаков и до целого числа.

Правило округления чисел:

1. Если первая [слева] из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя [справа] из сохраняющихся цифр увеличивается на 1. Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней следуют одна или несколько значащих цифр, то последняя из сохраняющихся цифр также увеличивается на 1.
2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр остаётся неизменной.
3. Если отбрасывается цифра 5, а за ней нет и никогда не было значащих цифр, то последняя из сохраняемых цифр остаётся неизменной, если она чётная, и увеличивается на 1, если она нечётная.

$x = 4{,}45575650$ - исходное число

$x \approx 4{,}455756$ - применён пункт 3 правила округления чисел

$x \approx 4{,}45576$ - применён пункт 1 правила округления чисел

$x \approx 4{,}4558$ - применён пункт 1 правила округления чисел

$x \approx 4{,}456$ - применён пункт 1 правила округления чисел

$x \approx 4{,}46$ - применён пункт 1 правила округления чисел

$x \approx 4{,}5$ - применён пункт 1 правила округления чисел

$x \approx 4$ - применён пункт 2 правила округления чисел

4) Вычислить верные значащие цифры чисел:

а) $x = 0,004507$, $\Delta = 0,00006$;

б) $x = 12,396$, $\Delta = 0,03$;

в) $x = 0,037862$, $\Delta = 0,007$.

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.
Значащую цифру приближённого значения числа называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

В записи рассматриваемых чисел подчеркнём верные значащие цифры.

а)

$$x = 0,00\underline{45}07 \pm 0,00006, \text{ т.к. } 0,00006 < 0,0001$$

б)

$$x = \underline{12,3}96 \pm 0,03, \text{ т.к. } 0,03 < 0,1$$

в)

$$x = 0,0\underline{3}7862 \pm 0,007, \text{ т.к. } 0,007 < 0,01$$

5) Стороны прямоугольника $a = 3,3$ см, $b = 5,2$ см измерены с абсолютной погрешностью $\Delta(\overline{a}) = \Delta(\overline{b}) = 0,1$ см. Найти:

а) абсолютную погрешность периметра и площади прямоугольника;

б) относительную погрешность периметра и определить пределы изменения относительной погрешности периметра.

Значащая цифра называется верной в широком смысле если абсолютная погрешность числа не превосходит одной единицы разряда, соответствующего этой цифре.
Значащая цифра называется верной в узком смысле если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.
В противном случае цифра считается сомнительной.

По правилу Брадиса-Крылова приближённое число записывают таким образом, чтобы все значащие цифры, кроме последней, были бы верными и лишь последняя цифра - сомнительной. Все цифры приближённого числа, следующие за верными и одной сомнительной, считаются неверными. Неверные цифры не пишут.

Периметр прямоугольника и его площадь вычисляются приближённо, т.к. его стороны измерены с некоторой погрешностью:

$$\overline{p} = 2\cdot(\overline{a} + \overline{b}) = 2\cdot(3,3 + 5,2) = 17,0 \text{ (см)}$$

$$\overline{S} = \overline{a}\cdot\overline{b} = 3,3\cdot 5,2 = 17,16 \text{ (см}^2\text{)}$$

(черта сверху символа означает, что это величина приближённая)

Абсолютная погрешность вычисления периметра равна

$$\Delta(\overline{p}) = 2\cdot(0,1 + 0,1) = 0,4 \text{ (см)}$$

Теперь вычислим относительные погрешности сторон:

$$\delta(\overline{a}) = \frac{0,1}{3,3} \approx 0,030 \text{ (в долях)}$$

$$\delta(\overline{b}) = \frac{0,1}{5,2} \approx 0,019 \text{ (в долях)}$$

Пределы изменения относительной погрешности периметра

$$0,019 \le \delta(\overline{p}) \le 0,030 \text{ (в долях)}$$

или

$$1,9 \le \delta(\overline{p}) \le 3,0 \text{ (\%)}$$

Относительная погрешность вычисления площади прямоугольника

$$\delta(\overline{S}) = \delta(\overline{a}) + \delta(\overline{b}) = \frac{0,1}{3,3} + \frac{0,1}{5,2} \approx 0,050 \text{ (в долях) } = 5 \text{ (\%)}$$

тогда абсолютная погрешность

$$\Delta(\overline{S}) = \overline{S} \cdot \delta(\overline{S}) = 17,16 \cdot 0,050 = 0,858 \text{ (см}^2\text{)}$$

Так как $\Delta(\overline{S}) = 0,858 < 1 \cdot 10^0$, то в результате $\overline{S} = 17,16$ верна цифра десятков (в узком смысле) и цифра единиц (в широком смысле); остальные цифры сомнительные. Поэтому, в соответствии с правилом Брадиса-Крылова, окончательно результат запишем в виде $S = \overline{S} \pm \Delta(\overline{S}) = 17,2 \pm 0,9$ см^2.

Для периметра $p = \overline{p} \pm \delta(\overline{p}) = 17,0 \pm 0,4$ см.

6) Рёбра прямоугольного параллелепипеда $a = 4,3$ см, $b = 1,6$ см, $c = 2,8$ см измерены с абсолютной погрешностью $\Delta(\overline{a}) = \Delta(\overline{b}) = \Delta(\overline{c}) = 0,1$ см. Определить абсолютную и относительную погрешность вычисления его объёма $V = a \cdot b \cdot c$.

Вычисляем объём параллелепипеда:

$$\overline{V} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 4,3 \cdot 1,6 \cdot 2,8 = 19,264 \text{ (см}^3\text{)}$$

Относительная погрешность вычисления объёма:

$$\delta(\overline{V}) = \delta(\overline{a}) + \delta(\overline{b}) + \delta(\overline{c}) = \frac{0,1}{4,3} + \frac{0,1}{1,6} + \frac{0,1}{2,8} \approx 0,121$$

тогда абсолютная погрешность

$$\Delta(\overline{V}) = \overline{V} \cdot \delta(\overline{V}) = 19,264 \cdot 0,121 = 2,330 \text{ (см}^3\text{)}$$

Так как $\Delta(\overline{V}) = 2,330 < 0,5 \cdot 10^1$, то в результате $\overline{V} = 19,264$ верна только цифра десятков (в узком смысле), а остальные цифры сомнительные. Поэтому, в соответствии с правилом Брадиса-Крылова, окончательно результат запишем в виде $V = \overline{V} \pm \delta(\overline{V}) = 19 \pm 2$ см^3.