Решить задачу линейного программирования, где

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 \ \rightarrow\ \max$$

а) геометрическим способом,
б) перебором базисных решений,
в) симплекс-методом.

⋆ Графическое решение задачи ⋆

Найдём геометрически наибольшее значение линейной функции $L(X) = 3x_1 + 4x_2$ в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Область G допустимых решений есть пересечение полуплоскостей (в скобках - уравнения их границ):

$$x_2 \le -\frac{3}{2}x_1 + 4 \qquad \left(x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 4\right) \qquad (1)$$

$$x_2 \le -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2} \qquad \left(x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2}\right) \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0 \qquad (x_1 = 0) \qquad (3)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad (x_2 = 0) \qquad (4)$$

Прямая 1:

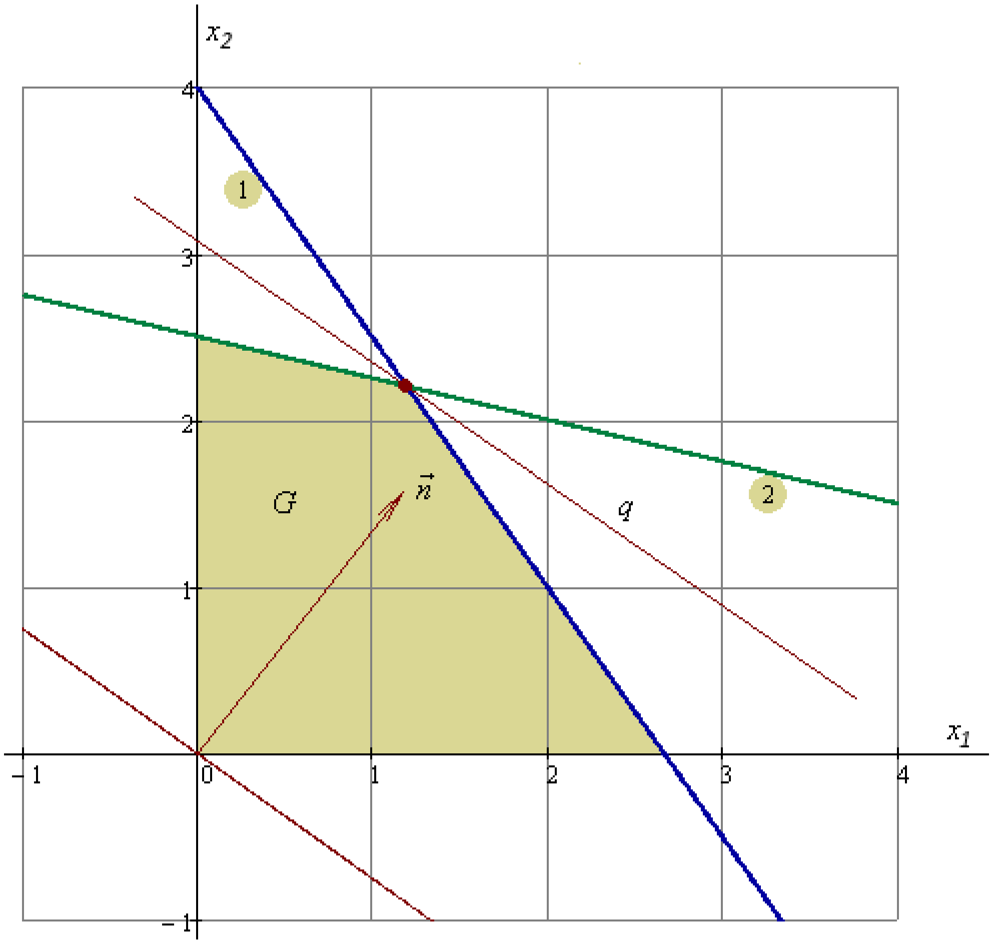
x_1	0	2
x_2	4	1

Прямая 2:

x_1	0	2
x_2	2,5	2

Строим вектор, сонаправленный с вектором $\vec{n} = \operatorname{grad} L(X)$ - его направление указывает на направление возрастания целевой функции $L(X) = 3x_1 + 4x_2$, например $\vec{n} = (3;4)$.

Прямая с уравнением $3x_1 + 4x_2 = 0$ представляет собой нулевую линию уровня целевой функции $L(X) = 3x_1 + 4x_2$. Эта прямая проходит через начало координат ($x_2 = -\frac{3}{4}x_1$) и перпендикулярна нормальному вектору линий уровня целевой функции $\vec{n} = (3;4)$. Передвигая эту прямую параллельно себе (по направлению $\vec{n}$), фиксируем её крайнее положение q. Это верхняя опорная прямая для области G.



Наибольшее значение $L(x_1; x_2)$ в области G определится пересечением прямых 1 и 2:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 4 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

$L(1,2\ ;\ 2,2) = 12,4$ - наибольшее значение целевой функции в области G.

⋆ Решение задачи путём перебора базисных решений ⋆

1-й способ оформления - непосредственная работа с системой уравнений.

Перейдём к системе уравнений, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 \ge 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_4 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad \to \quad \max$$

Найдём все базисные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных, входящих в него. Это будут опорные решения системы уравнений. Среди опорных решений выберем решение, доставляющее максимум функции цели.

Переменные, относительно которых разрешена система линейных уравнений, называются базисными переменными. Число базисных переменных равно рангу системы. Все остальные переменные называются свободными.

Среди всевозможных решений выберем такие, у которых значения всех свободных переменных равны нулю. Эти решения системы называют базисными решениями. Число базисных решений равно

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

где n - количество переменных системы линейных уравнений;
r - ранг матрицы системы.

Последовательность перебора базисных решений, когда каждое последующее решение отличается от предыдущего только одной базисной переменной, называют правильной. Всегда можно построить правильную последовательность базисных решений.

Например, если число переменных системы линейных уравнений $n = 4$, а ранг матрицы системы $r = 2$, то правильную последовательность базисных решений можно условно записать как

0011, 0101, 1001, 1010, 0110, 1100.

Такие переходы от одного базисного решения к другому базисному решению называют преобразованиями однократного замещения, т.к. требуется лишь одна итерация метода Жордана-Гаусса. Название преобразования связано с тем, что в базис вводится одна из свободных переменных, в то время как одна из существующих базисных переменных становится свободной. Таким образом, вводимая в базис свободная переменная *замещает* в базисе одну из переменных.

Базисные решения системы линейных уравнений, у которых значения всех базисных переменных неотрицательны, называют опорными решениями. Каждому опорному решению системы линейных ограничений задачи линейного программирования соответствуют координаты угловых точек области определения функции цели, и обратно, каждой угловой точке области определения функции цели соответствует опорное решение системы линейных ограничений задачи.

► Пусть x_3, x_4 - базисные переменные, x_1, x_2 - свободные (комбинация 0011).

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 10 - x_1 - 4x_2 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Решение является базисным при нулевых свободных переменных, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = 10 \\ L(X) = 0 \end{cases}$$

- первое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 1-е опорное решение.

► Теперь x_2, x_4 - базисные переменные, x_1, x_3 - свободные (комбинация 0101).

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = -6 + 5x_1 + 2x_3 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = -6 \end{cases}$$

- второе базисное решение, опорным не является.

► Теперь x_1, x_4 - базисные переменные, x_2, x_3 - свободные (комбинация 1001).

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \frac{22}{3} - \frac{10}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_4 = 22/3 \\ L(X) = 8 \end{cases}$$

- третье базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 2-е опорное решение.

► Теперь x_1, x_3 - базисные переменные, x_2, x_4 - свободные (комбинация 1010).

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 4x_2 - x_4 \\ x_3 = -22 + 10x_2 + 3x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_3 = -22 \end{cases}$$

- четвёртое базисное решение, опорным не является.

► Теперь x_2, x_3 - базисные переменные, x_1, x_4 - свободные (комбинация 0110).

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_3 = 3 - \dfrac{5}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5/2 \\ x_3 = 3 \\ L(X) = 10 \end{cases}$$

- пятое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 3-е опорное решение.

► Теперь x_1, x_2 - базисные переменные, x_3, x_4 - свободные (комбинация 1100).

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \dfrac{11}{5} + \dfrac{1}{10}x_3 - \dfrac{3}{10}x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \\ L(X) = 62/5 \end{cases}$$

- шестое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 4-е опорное решение.

Решение задачи находим среди опорных решений, выбрав решение, доставляющее максимум целевой функции:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

$$L(1{,}2\ ;\ 2{,}2) = 12{,}4$$

⋆ Решение задачи путём перебора базисных решений ⋆

2-й способ оформления - с применением таблиц Гаусса.

Перейдём к системе уравнений, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 \ge 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_4 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad \rightarrow \quad \max$$

Найдём все базисные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных, входящих в него. Это будут опорные решения системы уравнений. Среди опорных решений выберем решение, доставляющее максимум функции цели.

► Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение является базисным при нулевых свободных переменных, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = 10 \\ L(X) = 0 \end{cases}$$

- первое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 1-е опорное решение.

► Выбрав в качестве разрешающего элемент $(1;2)$ (1-я строка, 2-й столбец), преобразованием однократного замещения (используем метод Жордана-Гаусса) перейдём к следующему базисному решению.

Выбор разрешающего столбца определяет свободную переменную, которая вводится в базис, а выбор разрешающей строки определяет базисную переменную, которая будет выведена из базиса.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = -6 \end{cases}$$

- второе базисное решение, опорным не является.

► Переходим к следующему базисному решению.

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 10/3 & -1/3 & 1 & 22/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_4 = 22/3 \\ L(X) = 8 \end{cases}$$

- третье базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 2-е опорное решение.

►

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 10/3 & -1/3 & 1 & 22/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 1 & -3 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_3 = -22 \end{cases}$$

- четвёртое базисное решение, опорным не является.

►

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 1 & -3 & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 5/2 \\ 5/2 & 0 & 1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5/2 \\ x_3 = 3 \\ L(X) = 10 \end{cases}$$

- пятое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 3-е опорное решение.

►

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 5/2 \\ 5/2 & 0 & 1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/10 & 3/10 & 11/5 \\ 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 6/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \\ L(X) = 62/5 \end{cases}$$

- шестое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 4-е опорное решение.

Найдены все базисные решения заданной системы линейных уравнений. Решение задачи находим среди опорных решений, выбрав решение, доставляющее максимум целевой функции:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

$$L(1,2\ ;\ 2,2) = 12,4$$

Сделаем перебор базисных решений в Mathcad 14, переложив на программу рутинные вычисления каждого шага; преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой $JG(M, a, b)$:

ORIGIN := 1

$$JG(M,a,b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(M) \\ \quad \text{for } j \in 1..\text{cols}(M) \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} N_{i,j} \leftarrow \dfrac{M_{i,j}}{M_{a,b}} \quad \text{if } i = a \\ N_{i,j} \leftarrow M_{i,j} - \dfrac{M_{i,b} \cdot M_{a,j}}{M_{a,b}} \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ N \end{array} \right.$$

функция, выполняющая преобразование Жордана-Гаусса относительно указанного элемента (a,b) матрицы M.
(a - номер строки, считая с 1;
b - номер столбца, считая с 1)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,1,2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,2,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 1 & -3 & -22 \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,1,2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,2,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{11}{5} \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

⋆ Симплекс-метод решения задачи ⋆

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.
Задачу линейного программирования будем считать приведённой к каноническому виду, если:
- система ограничений содержит только равенства;
- правые части системы ограничений неотрицательны.

Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\} \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad \to \quad \max$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце $c^Б$ стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

базис	$c^Б$	3 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	b_i	θ_i	комментарий
x_3	0	3	2	1	0	8	8:4=2	
x_4	0	1	**4**	0	1	10	10:4=**2,5**	$\times\left(-\frac{1}{2}\right)_1$
		-3	**-4**	0	0	0		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_3, x_4, и начальное опорное решение:

$$x^{(0)} = (0;\, 0;\, 8;\, 10)$$

$$L^{(0)} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 0$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3 \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

► Поскольку в строке индексов есть отрицательные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Ведущий столбец α в случае задачи на максимум определяется по наименьшей оценке в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 2$ и в новый базис вводится переменная x_2.

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 2$ ($\theta_2 = 10 : 4 = 2,5$) и из базиса выводится переменная x_4.

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу. Переход от одного блока таблицы к другому осуществляем посредством элементарных преобразований Гаусса для строк.

базис	$c^Б$	3 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	b_i	θ_i	комментарий
x_3	0	**5/2**	0	1	-1/2	8	3:2,5=**1,2**	$\times\left(-\frac{1}{10}\right)_2$
x_2	4	1/4	1	0	1/4	10	2,5:0.25=10	
		-2	0	0	1	10		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = (0;\ 2{,}5\ ;\ 3;\ 0)$$

$$L^{(1)} = 3\cdot 0 + 4\cdot 2{,}5 + 0\cdot 3 + 0\cdot 0 = 10$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - 3 = -2 \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

► В строке индексов отрицательная оценка, следовательно, опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

Сейчас ведущий столбец $\alpha = 1$, а ведущая строка $\beta = 1$ ($\theta_1 = 3 : 2{,}5 = 1{,}2$).

базис	$c^Б$	3	4	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_1	3	1	0	2/5	-1/5	6/5		
x_2	4	0	1	-1/10	3/10	11/5		
		0	0	4/5	3/5	12,4		таблица №2

Новый опорный план:

$$x^{(2)} = (1{,}2\ ;\ 2{,}2\ ;\ 0;\ 0)$$

$$L^{(2)} = 3\cdot 1{,}2 + 4\cdot 2{,}2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 12{,}4$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} - 0 = \frac{4}{5} \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{5}$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неотрицательны.

Найдено решение, оптимальное с точки зрения максимизации целевой функции в имеющихся условиях:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

$$L(1{,}2\ ;\ 2{,}2) = 12{,}4$$

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1$

$L(x_1, x_2) := 3x_1 + 4x_2$

Given

$3x_1 + 2x_2 \le 8$

$x_1 + 4x_2 \le 10$

$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$

$y := \text{Maximize}(L, x_1, x_2)$

$y = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$

$L(y_0, y_1) = 12.4$

То же самое в матричном виде:

$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L(x) := c \cdot x \qquad \text{Given} \qquad A \cdot x \le b \qquad x \ge 0 \qquad y := \text{Maximize}(L, x)$

$y = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \end{pmatrix} \qquad L(y) = 12.4 \qquad A \cdot y = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

Решение задачи в Mathcad 14 с выводом всех промежуточных таблиц; преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой $JG(M, a, b)$:

ORIGIN := 1

$$JG(M,a,b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(M) \\ \quad \text{for } j \in 1..\text{cols}(M) \\ \quad \left| \begin{array}{l} N_{i,j} \leftarrow \dfrac{M_{i,j}}{M_{a,b}} \ \text{ if } i = a \\ N_{i,j} \leftarrow M_{i,j} - \dfrac{M_{i,b} \cdot M_{a,j}}{M_{a,b}} \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ N \end{array} \right.$$

функция, выполняющая преобразование Жордана-Гаусса относительно указанного элемента (a,b) матрицы M.
(a - номер строки, считая с 1;
b - номер столбца, считая с 1)

0) $$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $$A := JG(A,2,2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

2) $$A := JG(A,1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{62}{5} \end{pmatrix}$$

Литература:

1) Ермаков В.И. и др. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр. 540;
2) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006, стр. 60;
3) Лунгу К.Н. "Линейное программирование; руководство к решению задач", 2005;
4) Рудык Б.М. и др. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2006.
5) Охорзин В.А. "Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad 12", 2005, стр. 19;
6) Сдвижков О.А. "Mathcad-2000: введение в компьютерную математику", 2002, стр. 153;
7) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Mathcad 12", 2005, стр. 224.