Предположим, что мужчин можно разделить по их профессиям на работников умственного труда (РУТ), квалифицированных рабочих (КР) и неквалифицированных рабочих (НР). Допустим, что 80% сыновей РУТ становятся РУТ, 10% становятся КР и 10% - НР. Пусть из сыновей КР 60% становятся КР, 20% - РУТ и 20% - НР. Наконец, 50% сыновей НК пусть будут КР и по 25% пусть приходится на долю других категорий. В предположении, что каждый мужчина имеет одного сына:

а) построить цепь Маркова с трёмя состояниями, чтобы проследить за несколькими поколениями какой-либо семьи;

б) выписать матрицу вероятностей перехода;

в) найти вероятность того, что внук НР станет РУТ.

а)

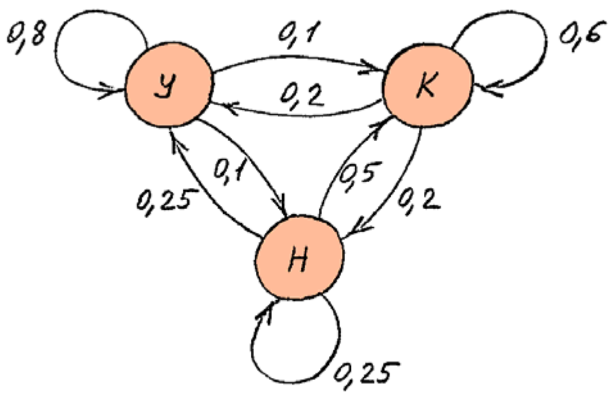
Запишем все состояния цепи Маркова в данной задаче:

$У$ - мужчина РУТ (работник умственного труда);

$К$ - мужчина КР (квалифицированный рабочий);

$Н$ - мужчина НР (неквалифицированный рабочий).

Построим граф состояний и разметим его переходными вероятностями:



б)

Составим матрицу вероятностей перехода:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} У & К & Н \end{array} \\ \begin{array}{c} У \\ К \\ Н \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \end{array}$$

в)

По формуле полной вероятности (которую в данном контексте называют равенством Маркова) находим вероятность того, что внук НР станет РУТ.

$$p = P_{31}(У/Н) =$$

$$= P_{32}(У/К)\cdot P_{21}(К/Н) + P_{32}(У/Н)\cdot P_{21}(Н/Н) + P_{32}(У/У)\cdot P_{21}(У/Н) =$$

$$= 0,2\cdot 0,5 + 0,25\cdot 0,25 + 0,8\cdot 0,25 = 0,3625$$

(здесь индексами отражена связь поколений:
1-е поколение соответствует деду, 2-е поколение соответствует сыну, 3-е поколение соответствует внуку;
так что например 31 означает "внук деда", а P_{31} означает вероятность перехода из состояния 1 в состояние 3)

Литература:

1) Кирьянова Л.В. “Теория вероятностей и математическая статистика”, 2006, СГА: курс 2, юнита 2.

Тот же результат можно получить в матричном исчислении.

2-й способ решения

Имеем матрицу перехода

$$P(1)=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Вероятностью перехода $H \to У$ за два шага является элемент $p_{31}(2)$ матрицы $P(2)=P^2$:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,685 & 0,19 & 0,125 \\ 0,33 & 0,48 & 0,19 \\ 0,3625 & 0,45 & 0,1875 \end{pmatrix}$$

Искомая вероятность

$$p_{31}(2)=0,3625.$$

3-й способ решения

Можно сузить объём получаемой информации, выделив из матрицы перехода $P(2)$ актуальную строку (строку, соответствующую H). Кроме того, данный способ более универсален, т.к. позволяет иметь дело с произвольным начальным распределением вероятностей.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(m)$ не зависит от номера испытания m.

Для однородной марковской цепи справедлива формула связи между начальным состоянием системы и её состоянием на n-м шаге перехода из состояния в состояние ($n \in N$):

$$p^T(n)=p^T(0)\cdot P^n,$$

где $p(0)$ - вектор вероятностей начального (нулевого) состояния системы;

$p(n)$ - вектор вероятностей состояния системы на n-м шаге;

P - матрица перехода.

Начальное распределение вероятностей (на нулевом шаге) имеет вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} У & К & H \end{matrix} \\ p(0)= & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Распределение вероятностей на втором шаге:

$$p(2)=p(0)\cdot P^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,3625 & 0,45 & 0,1875 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вероятность мужчине во втором поколении оказаться работником умственного труда, если его дед был неквалифицированным рабочим, равна $p=0,3625$.

Вычисления в Mathcad 14:

$$p := (0 \ \ 0 \ \ 1) \quad P := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \quad P^2 \to \begin{pmatrix} 0.685 & 0.19 & 0.125 \\ 0.33 & 0.48 & 0.19 \\ 0.3625 & 0.45 & 0.1875 \end{pmatrix} \quad p\cdot P^2 \to (0.3625 \ \ 0.45 \ \ 0.1875)$$

Литература:

1) Красс М.С., Чупрынов Б.П. “Математика в экономике: математические методы и модели”, 2007, стр. 95 (пример 17);
2) Гмурман В.Е. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2005, стр. 385 (пример);
3) Емельянов Г.В., Скитович В.П. "Задачник по теории вероятностей и математической статистике", 2007, стр. 91.