

1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$$

- это линейное неоднородное ДУ 4-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения  $\hat{y}$  соответствующего однородного уравнения и частного решения  $y^*$  неоднородного уравнения:  $y = \hat{y} + y^*$ .

► Сначала находим **общее** решение соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$$

Его характеристическое уравнение  $k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$  имеет **корни действительные и кратные**  $k_{1,2} = -1$ ,  $k_{3,4} = 0$ . Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 2]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x} + C_3 + C_4 \cdot x$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую особый (специальный) вид, **частное** решение ДУ найдём **методом неопределённых коэффициентов**.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где  $r$  - число, равное кратности  $\alpha$  как корня характеристического уравнения,

$n$  - порядок многочлена  $P_n(x)$ ,

$Q_n(x)$  - многочлен степени  $n$ , записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^2 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) \cdot e^{0 \cdot x} = A \cdot x^4 + B \cdot x^3 + C \cdot x^2$$

Тогда

$$(y^*)' = 4A \cdot x^3 + 3B \cdot x^2 + 2C \cdot x$$

$$(y^*)'' = 12A \cdot x^2 + 6B \cdot x + 2C$$

$$(y^*)''' = 24A \cdot x + 6B$$

$$(y^*)^{(4)} = 24A$$

Подставив  $y^*$ ,  $(y^*)'$ ,  $(y^*)''$  в исходное уравнение, получим

$$24A + 2 \cdot (24A \cdot x + 6B) + 12A \cdot x^2 + 6B \cdot x + 2C = 12x^2 - 6x$$

$$x^2 \cdot 12A + x \cdot (48A + 6B) + (24A + 12B + 2C) = 12x^2 - 6x$$

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 48A + 6B = -6 \\ 24A + 12B + 2C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -9 \\ C = 42 \end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^* = x^4 - 9x^3 + 42x^2$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot xe^{-x} + C_3 + C_4 \cdot x + x^4 - 9x^3 + 42x^2$$

Решение в Maple 12:

$$\text{dsolve}(y'''' + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x);$$

$$y(x) = e^{-x} \_C2 + \_C1 (e^{-x} x + 2 e^{-x}) - 9 x^3 + x^4 + 42 x^2 + \_C3 x + \_C4$$

2) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения  $\hat{y}$  соответствующего

однородного уравнения и частного решения  $y^*$  неоднородного уравнения:  $y = \hat{y} + y^*$ .

► Сначала находим **общее** решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0$$

Его характеристическое уравнение  $k^3 + 3k^2 + 2k = 0$  имеет **корни действительные и различные**  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = -1$ ,  $k_3 = 0$ . Следовательно, общее решение однородного уравнения (\*\*) [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{0 \cdot x} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую специальный вид, **частное** решение ДУ найдём **методом неопределённых коэффициентов**.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где  $r$  - число, равное кратности  $\alpha$  как корня характеристического уравнения,

$n$  - порядок многочлена  $P_n(x)$ ,

$Q_n(x)$  - многочлен степени  $n$ , записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^1 \cdot (A \cdot x + B) \cdot e^{-x} = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}$$

Тогда

$$(y^*)' = e^{-x} \cdot (-Ax^2 + (2A - B)x + B)$$

$$(y^*)'' = e^{-x} \cdot (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B)$$

$$(y^*)''' = e^{-x} \cdot (-Ax^2 + (6A - B)x - 6A + 3B)$$

Подставив  $y^*$ ,  $(y^*)'$ ,  $(y^*)''$  в исходное уравнение, получим

$$e^{-x} \cdot (-Ax^2 + (6A - B)x - 6A + 3B) + 3e^{-x} \cdot (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B) + 2e^{-x} \cdot (-Ax^2 + (2A - B)x + B) = (1 - 2x)e^{-x}$$

$$(-Ax^2 + (6A - B)x - 6A + 3B) + 3 \cdot (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B) + 2 \cdot (-Ax^2 + (2A - B)x + B) = (1 - 2x)$$

$$-2Ax - B = -2x + 1$$

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ -B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^* = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 + (x^2 - x) \cdot e^{-x} = C_1 e^{-2x} + (x^2 - x + C_2) \cdot e^{-x} + C_3$$

Решение в Maple 12:

$$\text{dsolve}(y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x) \cdot e^{-x});$$

$$y(x) = -e^{-x}x - e^{-x} + e^{-x}x^2 + \frac{1}{2} \_C1 e^{-2x} - e^{-x} \_C2 + \_C3$$

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения  $\hat{y}$  соответствующего однородного уравнения и частного решения  $y^*$  неоднородного уравнения:  $y = \hat{y} + y^*$ .

► Сначала находим **общее** решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''' - 25y' = 0$$

Его характеристическое уравнение  $k^3 - 25k = 0$  имеет **корни действительные и различные**  $k_1 = -5$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 5$ . Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{0 \cdot x} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение  $y^*$  неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: **методом неопределённых коэффициентов** [1, стр. 362]. В данном случае правая часть уравнения имеет два специальных слагаемых и частное решение найдём как суперпозицию двух частных решений.

Для слагаемого вида [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где  $r$  - число, равное кратности  $\alpha$  как корня характеристического уравнения,

$n$  - порядок многочлена  $P_n(x)$ ,

$Q_n(x)$  - многочлен степени  $n$ , записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y_1^* = x^1 \cdot A \cdot e^{5x} = Ax \cdot e^{5x}$$

Для слагаемого вида [1, стр. 363, случай 2]

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$$

частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x)$$

где  $r$  - число, равное кратности  $\alpha + \beta i$  как корня характеристического уравнения,

$n$  - порядок многочлена  $P_n(x)$ ,  $m$  - порядок многочлена  $Q_m(x)$ ,

$M_l(x)$  и  $N_l(x)$  - многочлены степени  $l$  с неопределёнными коэффициентами,

$l$  - наивысшая степень многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$ , т.е.  $l = \max(n, m)$ .

т.е.

$$y_2^* = x^0 \cdot e^{0x} \cdot (B \cdot \cos 5x + C \cdot \sin 5x) = B \cos 5x + C \sin 5x$$

Так что для правой части в целом частное решение имеет вид

$$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax \cdot e^{5x} + B \cos 5x + C \sin 5x$$

Тогда

$$(y^*)' = Ae^{5x} \cdot (1 + 5x) - 5B \sin 5x + 5C \cos 5x$$

$$(y^*)'' = 5Ae^{5x} \cdot (2 + 5x) - 25B \cos 5x - 25C \sin 5x$$

$$(y^*)''' = 25Ae^{5x} \cdot (3 + 5x) + 125B \sin 5x - 125C \cos 5x$$

Подставив  $(y^*)'$ ,  $(y^*)'''$  в исходное уравнение, получим

$$50Ae^{5x} + 250B \sin 5x - 250C \cos 5x \equiv 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$$

что соответствует системе тождеств

$$\begin{cases} 50A \equiv -50 \\ 250B \equiv 25 \\ -250C \equiv 25 \end{cases}$$

откуда получаем коэффициенты

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1/10 \\ C = -1/10 \end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^* = -x \cdot e^{5x} + \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{10} \sin 5x$$

а общее решение исходного уравнения

$$\begin{aligned} y = \hat{y} + y^* &= C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3 - x \cdot e^{5x} + \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{10} \sin 5x = \\ &= C_1 e^{-5x} + (C_2 - x) e^{5x} + C_3 + \frac{1}{10} (\cos 5x - \sin 5x) \end{aligned}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve(y''' - 25y' = 25 \cdot (\sin(5x) + \cos(5x)) - 50 \cdot e^{5x});$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{5x} \_C2 - \frac{1}{5} e^{-5x} \_C1 - e^{5x} x + \frac{3}{10} e^{5x} - \frac{1}{10} \sin(5x) + \frac{1}{10} \cos(5x) + \_C3$$