

1) Найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 - x, \quad y(0) = 0, \\ y'(0) = 1/9.$$

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения \hat{y} соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим **общее** решение соответствующего **однородного** уравнения:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни **действительные и различные** $k_1 = 2, k_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение y^* неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: **методом неопределённых коэффициентов** [1, стр. 362].

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где r - число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ - многочлен степени n , записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^0 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) \cdot e^{0 \cdot x} = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

Тогда

$$(y^*)' = 2A \cdot x + B$$

$$(y^*)'' = 2A$$

Подставив y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$$2A - 5 \cdot (2Ax + B) + 6 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = x^2 - x$$

$$x^2 \cdot 6A + x \cdot (-10A + 6B) + (2A - 5B + 6C) = x^2 - x$$

и вычислим коэффициенты A , B и C :

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = -1 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 1/9 \\ C = 1/27 \end{cases}$$

Частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x + \frac{1}{27}$$

и, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x + \frac{1}{27}$$

► Найдём константы C_1 и C_2 , соответствующие данным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/9$.

$$y' = 2C_1 \cdot e^{2x} + 3C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1/27 \\ 1/9 = 2C_1 + 3C_2 + 1/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -1/9 \\ C_2 = 2/27 \end{cases}$$

Так что частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид:

$$y = -\frac{1}{9} \cdot e^{2x} + \frac{2}{27} \cdot e^{3x} + \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x + \frac{1}{27}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve(y'' - 5y' + 6y = x^2 - x);$$

$$y(x) = e^{2x} _C2 + e^{3x} _C1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{6}x^2$$

$$dsolve\left(\left\{y'' - 5y' + 6y = x^2 - x, y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{9}\right\}\right);$$

$$y(x) = \frac{2}{27}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{6}x^2$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

2) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = x.$$

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения \hat{y} соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим **общее** решение соответствующего **однородного** уравнения:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$ имеет корни **действительные и одинаковые** $k_{1,2} = -1$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 2]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x}$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение y^* неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: **методом неопределённых коэффициентов** [1, стр. 362].

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n – порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ – многочлен степени n , записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^0 \cdot (A \cdot x + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B$$

Тогда

$$(y^*)' = A$$

$$(y^*)'' = 0$$

Подставив y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$$2A + Ax + B \equiv x$$

и вычислим коэффициенты A и B :

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

Частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = x - 2$$

и, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x} + x - 2$$

Решение в Maple 12:

```
dsolve(y'' + 2 y' + y = x);  
y(x) = e^{-x} _C2 + e^{-x} x _C1 - 2 + x
```

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = e^x (3 \sin x + 5 \cos x)$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения \hat{y} соответствующего

однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим **общее** решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 8 = 0$ имеет **корни комплексные сопряжённые** $k_{1,2} = 2 \pm 2i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 358, случай 3]

$$\hat{y} = C_1 e^{2x} \cos(2x) + C_2 e^{2x} \sin(2x)$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую особый вид, **частное** решение ДУ найдём **методом неопределённых коэффициентов**.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 363, случай 2]

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x)$$

где r - число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения,
 n - порядок многочлена $P_n(x)$, m - порядок многочлена $Q_m(x)$,
 $M_l(x)$ и $N_l(x)$ - многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами,
 l - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l = \max(n, m)$.

т.е.

$$y^* = x^0 \cdot e^x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = e^x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

Тогда

$$(y^*)' = e^x \cdot ((A+B) \cdot \cos x + (-A+B) \cdot \sin x)$$

$$(y^*)'' = 2e^x \cdot (B \cdot \cos x - A \cdot \sin x)$$

Подставив y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$$2e^x \cdot (B \cdot \cos x - A \cdot \sin x) - 4 \cdot e^x \cdot ((A+B) \cdot \cos x + (-A+B) \cdot \sin x) + 8 \cdot e^x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = e^x (3 \sin x + 5 \cos x)$$

$$2 \cdot (B \cdot \cos x - A \cdot \sin x) - 4 \cdot ((A+B) \cdot \cos x + (-A+B) \cdot \sin x) + 8 \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = 3 \sin x + 5 \cos x$$

$$(4A - 2B) \cdot \cos x + (2A + 4B) \cdot \sin x = 3 \sin x + 5 \cos x$$

$$\begin{cases} 4A - 2B = 5 \\ 2A + 4B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 13/10 \\ B = 1/10 \end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^* = \frac{e^x}{10} \cdot (13 \cos x + \sin x)$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 e^{2x} \cos(2x) + C_2 e^{2x} \sin(2x) + \frac{e^x}{10} \cdot (13 \cos x + \sin x)$$

Решение в Maple 11:

```
> Eq:=diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)+8*y(x)=exp(x)*(3*sin(x)+5*cos(x));
```

$$Eq := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - 4 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 8 y(x) = e^x (3 \sin(x) + 5 \cos(x))$$

```
> dsolve(Eq,y(x));
```

$$y(x) = e^{(2x)} \sin(2x) _C2 + e^{(2x)} \cos(2x) _C1 + \frac{1}{10} e^x (\sin(x) + 13 \cos(x))$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.