

Найти общее решение ДУ $3x \cdot (e^y - y') = 1$.

Пусть $e^y = u$, тогда $e^y \cdot y' = u'$, и

$$y' = e^y - \frac{1}{3x}$$

$$\frac{u'}{u} = u - \frac{1}{3x}$$

$$u' = u^2 - \frac{u}{3x} \quad (1)$$

Это уравнение Рикатти [1, стр. 73]; его можно проинтегрировать в том случае, если найдём хотя бы одно его частное решение. Иногда такое решение удаётся подобрать исходя из вида свободного члена уравнения

($c(x)$). В данном примере попытаемся искать его в виде $u = \frac{k}{x}$. Подставляя $u(x)$ в уравнение (1), получим

$$-\frac{k}{x^2} = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k}{3x^2}$$

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = -\frac{2}{3}$$

и соответственно

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = -\frac{2}{3x}$$

- два решения уравнения (1). Далее замена $u = z - \frac{2}{3x}$ приводит исходное уравнение к уравнению

$$z' + \frac{2}{3x^2} = z^2 - \frac{4z}{3x} + \frac{4}{9x^2} - \frac{z}{3x} + \frac{2}{9x^2}$$

$$z' = z^2 - \frac{5z}{3x}$$

Умножая обе части этого уравнения на x^2 , получаем

$$z' \cdot x^2 = z^2 \cdot x^2 - \frac{5}{3} \cdot zx$$

$$\left| \begin{array}{l} (zx)' = z'x + z \\ x \cdot (zx)' = z'x^2 + zx \end{array} \right.$$

$$x \cdot \frac{d}{dx}(zx) - zx = (zx)^2 - \frac{5}{3} \cdot (zx)$$

Обозначим $zx = v$:

$$x \cdot \frac{dv}{dx} - v = v^2 - \frac{5}{3} \cdot v$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v^2 - \frac{2}{3} \cdot v$$

$$\frac{dv}{v^2 - \frac{2}{3} \cdot v} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (\ln |3v - 2| - \ln |v|) = \ln |x| + \ln C_1$$

$$\ln \left| \frac{3v-2}{v} \right| = \ln \left(C_1 \cdot x \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3v-2}{v} = C \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$v = \frac{2}{3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

Возвращаемся к заменам

$$z = \frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}} \right)}$$

$$u = \frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}} \right)} - \frac{2}{3x}$$

$$y = \ln \left(\frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}} \right)} - \frac{2}{3x} \right) = \ln \left(\frac{2}{\frac{9}{C} x^{\frac{1}{3}} - 3x} \right)$$

Переобозначим $\frac{9}{C}$ как C , и окончательно решение запишем в виде

$$y = \ln \left(\frac{2}{C \cdot \sqrt[3]{x} - 3x} \right)$$

Проверка подстановкой решения в исходное уравнение (Mathcad 14):

$$y(x) := \ln \left(\frac{2}{C \cdot \sqrt[3]{x} - 3x} \right) \quad 3x \cdot \left(e^{y(x)} - \frac{d}{dx} y(x) \right) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

Решение ДУ в Maple 10:

```
> Eq:=3*x*(exp(y(x))-diff(y(x),x))=1;# ДУ
      Eq := 3 x \left( e^{y(x)} - \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) \right) = 1
> dsolve(Eq,y(x));# общее решение ДУ
      y(x) = ln \left( - \frac{2}{3 x - \frac{1}{3} C_1 x} \right)
```

Литература:

- 1) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи", 1989, стр. 73 (пример 1.87);
- 2) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями", 2005, стр. 51 (уравнение Рикатти);
- 3) Степанов В.В. "Курс дифференциальных уравнений", 1990, стр. 47...55 (уравнение Рикатти).