Дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Функция $f(x;y)$ называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если при умножении каждого её аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т.е.

$$f(\lambda \cdot x;\ \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x;y).$$

1) Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$x^2 y' = y^2 + xy + x^2$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$ и $y' = u'x + u$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u = u^2 + u + 1$$

$$\frac{du}{dx}x = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{u^2+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln|x| + C$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\ln|x| + C\right)$$

$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\ln|x| + C\right)$ - общее решение ДУ.

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x^2 * y'[x] == y[x]^2 + x * y[x] + x^2, y[x], x]

{{y[x] → x Tan[C[1] + Log[x]]}}
```

Решение в Maple 17:

$dsolve\left(x^2 \cdot y' = y^2 + x \cdot y + x^2\right);$

$y(x) = \tan(\ln(x) + \_C1)\, x$

Решение в Maxima 5:

```
ode2(x^2*'diff(y,x)=y^2+x*y+x^2, y, x);
```

$$\%c\, x = \%e^{\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Действительно, если константу C прибавить в виде

$$\operatorname{arctg} u = \ln|x| + \ln|C|,$$ то

$$Cx = e^{\operatorname{arctg} u}$$

$$Cx = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

2) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x \cdot y' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$\left(2y^2 + 5x^2\right) \cdot x\,dy = \left(3y^3 + 10yx^2\right)dx$$

- это однородное уравнение

Пусть $y = u \cdot x$, тогда $dy = x\,du + u\,dx$, и

$$\left(2u^2x^2 + 5x^2\right) \cdot x\left(x\,du + u\,dx\right) = \left(3u^3x^3 + 10ux^3\right)dx$$

$$\left(2u^2 + 5\right) \cdot \left(x\,du + u\,dx\right) = \left(3u^3 + 10u\right)dx$$

$$\left(2u^2 + 5\right) \cdot x\,du = \left(u^3 + 5u\right)dx$$

$$\frac{\left(2u^2 + 5\right)du}{\left(u^3 + 5u\right)} = \frac{dx}{x}$$

Правильную рациональную алгебраическую дробь в левой части равенства представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2u^2 + 5}{u^3 + 5u} = \frac{2u^2 + 5}{u \cdot \left(5 + u^2\right)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 5} = \frac{A \cdot \left(5 + u^2\right) + \left(Bu + C\right) \cdot u}{u \cdot \left(5 + u^2\right)} = \frac{u^2 \cdot \left(A + B\right) + u \cdot C + 5A}{u \cdot \left(5 + u^2\right)}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = 0 \\ 5A = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + 5}\right)du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(u^2 + 5\right) = \ln|x| + \ln|C|$$

$$u \cdot \sqrt{u^2 + 5} = C \cdot x$$

$$\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5} = C \cdot x$$

$y^2 = \dfrac{C^2x^6}{y^2 + 5x^2}$ - общее решение ДУ $\quad (C \in \mathbb{R})$

- запись результата в виде дроби позволяет учесть ОДЗ исходного ДУ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Литература:

1) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, 2005, стр. 27 (пример 1).

Сделаем проверку, продифференцировав неявно заданную функцию $y^2\cdot\left(y^2+5x^2\right)=C^2x^6$.

$$y^4+5x^2y^2=C^2x^6$$

$$4y^3y'+5\cdot 2xy^2+5x^2\cdot 2yy'=6C^2x^5$$

$$y'\cdot\left(4y^3+10x^2y\right)=6C^2x^5-10xy^2$$

$$y'\cdot\left(2y^3+5x^2y\right)=3C^2x^5-5xy^2$$

$$C^2=\frac{y^2}{x^6}\cdot\left(y^2+5x^2\right)=\frac{y^4}{x^6}+\frac{5y^2}{x^4}$$

$$y'y\cdot\left(2y^2+5x^2\right)=\frac{3y^4}{x}+15y^2x-5xy^2$$

$$y'y\cdot\left(2y^2+5x^2\right)=\frac{3y^4}{x}+10y^2x$$

$$y'x\cdot\left(2y^2+5x^2\right)=3y^3+10yx^2$$

$$x\cdot y'=\frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$$

То же самое в Mathcad 14:

$$F(x,y):=y^2-\frac{C^2\cdot x^6}{y^2+5x^2}\qquad y':=-\left(\frac{\frac{d}{dx}F(x,y)}{\frac{d}{dy}F(x,y)}\right)$$

$$x\cdot y'\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute},C^2=\frac{y^2}{x^6}\cdot\left(y^2+5x^2\right)\\ \text{simplify}\end{array}\right.\ \rightarrow\ \frac{y\cdot\left(10\cdot x^2+3\cdot y^2\right)}{5\cdot x^2+2\cdot y^2}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 20012, стр. 317 (дифференцирование неявной функции).

.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}\cdot y'.$$

$$y'\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)-y=0\qquad \Big|:x\neq 0$$

$$y'\cdot\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)-\frac{y}{x}=0$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть $u=\dfrac{y}{x}$, тогда $y=ux$ и $y'=u'x+u$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$(u'x+u)\cdot\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)-u=0$$

$$u'x+u'x\cdot\sqrt{1+u^2}+u\cdot\sqrt{1+u^2}=0$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=-u\cdot\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)du}{u\cdot\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)du}{u\cdot\sqrt{1+u^2}}=\begin{bmatrix}1+u^2=t^2,\ t>0\\ 2u\,du=2t\,dt\\ du=\dfrac{t\,dt}{u}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t-1}=\ln|t-1|+C=\ln\left|\sqrt{1+u^2}-1\right|+C$$

$$-\int\frac{dx}{x}=-\ln|x|+C$$

и получаем

$$\ln\left|\sqrt{1+u^2}-1\right|=-\ln|x|+\ln|C|$$

$$\ln\left|\sqrt{1+u^2}-1\right|+\ln|x|=\ln|C|$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-1\right|+\ln|x|=\ln|C|$$

$$\ln\left|\sqrt{x^2+y^2}-x\right|=\ln|C|$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-x=C$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C$$

$$x^2+y^2=x^2+2Cx+C^2$$

$y^2=(2x+C)\cdot C$ - общее решение ДУ.

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9}$$

$$y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9}$$

$$(10x-y-9)dy=(x+8y-9)dx$$

$$(x+8y-9)dx+(y-10x+9)dy=0$$

Данное уравнение приводится к однородному переносом начала координат в точку пересечения прямых $x+8y-9=0$ и $y-10x+9=0$:

$$\begin{cases}x+8y-9=0\\ y-10x+9=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Сделаем подстановку $x_1=x-1$ и $y_1=y-1$; при этом $dx=dx_1$, $dy=dy_1$:

$$(x_1+8y_1)dx_1+(y_1-10x_1)dy_1=0$$

$$(10x_1-y_1)\frac{dy_1}{dx_1}=(x_1+8y_1)$$

$$\left(10-\frac{y_1}{x_1}\right)\frac{dy_1}{dx_1}=\left(1+\frac{8y_1}{x_1}\right)$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть $u=\frac{y_1}{x_1}$, тогда $y_1=ux_1$ и $y'_1=u'x_1+u$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$(10-u)\cdot(u'x_1+u)=1+8u$$

$$u'x_1+u=\frac{1+8u}{10-u}$$

$$\frac{du}{dx_1}x_1=\frac{1+8u}{10-u}-u$$

$$\frac{du}{dx_1}x_1=\frac{u^2-2u+1}{10-u}$$

$$\frac{10-u}{u^2-2u+1}du=\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\frac{10-u}{(u-1)^2}du=\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\left(\frac{1-u}{(u-1)^2}+\frac{9}{(u-1)^2}\right)du=\frac{dx_1}{x_1}$$

$$-\int\frac{du}{u-1}+9\cdot\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx_1}{x_1}$$

$$-\ln|u-1|+9\cdot\left(-\frac{1}{u-1}\right)=\ln|x_1|+\ln|C|$$

$$-\ln|u-1|+9\cdot\left(-\frac{1}{u-1}\right)=\ln|x_1|+\ln|C|$$

$$\ln|x_1|+\ln|C|+\ln|u-1|=-\frac{9}{u-1}$$

$$\ln|Cx_1\cdot(u-1)|=-\frac{9}{u-1}$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\ln\left|Cx_1\cdot\left(\frac{y_1}{x_1}-1\right)\right|=\frac{9}{1-\frac{y_1}{x_1}}$$

и

$$\ln\left|C(x-1)\cdot\left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)\right|=\frac{9}{1-\frac{y-1}{x-1}}$$

$$\ln|C(y-1-x+1)|=\frac{9(x-1)}{x-1-y+1}$$

$$\ln|C(x-y)|=\frac{9(x-1)}{x-y}$$ - общее решение ДУ.

Литература:

1) Пушкарь Е.А. "Дифференциальные уравнения в задачах и примерах", 2007, стр. 24 (задача 4.3).

5) Решить дифференциальное уравнение:

$$xy'+2\sqrt{xy}=y, \quad y(1)=1.$$

$$xy'+2\sqrt{xy}=y$$

Разделим уравнение на $x\neq 0$:

$$y'=\frac{y}{x}-2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть $u=\dfrac{y}{x}$, тогда $y=ux$ и $y'=u'x+u$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x+u=u-2\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{dx}x=-2\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{-2dx}{x}$$

$$2\sqrt{u}=-2\ln|x|-2C$$

$$\sqrt{u}=-\ln|x|-C$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=-\ln|x|-C$$

$$\frac{y}{x}=\left(-\ln|x|-C\right)^2$$

$y=x\cdot\left(\ln|x|+C\right)^2$ - общее решение ДУ.

Найдём константу C, соответствующую данному начальному условию $y(1)=1$:

$$1=1\cdot(\ln 1+C)^2$$

$$C=\pm 1$$

и тогда

$$y=x\cdot\left(\ln|x|\pm 1\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} y=x\cdot\ln^2|ex| \\ y=x\cdot\ln^2\left|\dfrac{x}{e}\right| \end{array}\right.$$

- найдены два частных решения ДУ, удовлетворяющие начальному условию $y(1)=1$.

Решение ДУ в Maple 17:

$$dsolve\left(x\cdot y'+2\cdot\sqrt{x\cdot y}=y\right)$$

$$\frac{y(x)}{\sqrt{x\,y(x)}}+\ln(x)-\_C1=0$$

$$dsolve\left(\{x\cdot y'+2\cdot\sqrt{x\cdot y}=y, y(1)=1\}\right)$$

$$y(x)=\ln(x)^2x-2\ln(x)\,x+x$$

6) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{y+x}=\frac{dy}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

$$y'+\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=0$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть $u=\frac{y}{x}$, тогда $y=ux$ и $y'=u'x+u$.

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x+u+\frac{1-u}{1+u}=0$$

$$\frac{du}{dx}x=-u-\frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{\left(-u-\frac{1-u}{1+u}\right)}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+u)\,du}{1+u^2}=-\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{(1+u)\,du}{1+u^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{1+u^2}+\int\frac{u\,du}{1+u^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{1+u^2}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(1+u^2\right)}{1+u^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg}u+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1+u^2\right|=-\ln|x|+C$$

$$\operatorname{arctg}u+\ln\sqrt{1+u^2}+\ln|x|=C$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\ln|x|=C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}+\ln|x|=C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\frac{|x|\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}=C$$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=C$ - общее решение ДУ.

Решение уравнения проверим дифференцированием:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=C$$

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=0$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'\cdot x-y}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+2y\cdot y')=0$$

$$\frac{y'\cdot x-y}{x^2+y^2}+\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2}=0$$

$$y'\cdot x-y+x+y\cdot y'=0$$

$$y'\cdot(y+x)=y-x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

$$\frac{dx}{y+x}=\frac{dy}{y-x}$$