1) Масса (в граммах) в тонком неоднородном стержне распределяется по закону $m(l)=4l^2-6l+9$ (l - расстояние от начала стержня до любой его точки в см). Найдите плотность стержня на расстоянии 2 см от начала стержня.

$$\rho(l)=m'(l)=\left(4l^2-6l+9\right)'=8l-6$$
$$\rho(2)=8\cdot 2-6=10 \quad \text{(г/см)}$$

2) Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$ (x - расстояние от начала координат в метрах, t - время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 5 секунд после начала движения.

$$E(t)=\frac{mv^2(t)}{2}$$
$$v(t)=x'(t)=\left(t^2+t+1\right)'=2t+1$$
$$E(t)=\frac{m\cdot(2t+1)^2}{2}$$
$$E(5)=\frac{4\cdot(2\cdot 5+1)^2}{2}=242 \quad \text{(Дж)}$$

3) На сколько увеличится при нагревании объём куба, ребро которого равно 10 см, если удлинение ребра куба равно 0,03 см ?

Обозначим:

x - ребро куба;

Δx - изменение длины ребра куба.

Объём куба можно представить как функцию $V(x)=x^3$.

Поскольку изменение ребра куба мало, приближённое вычисление изменения объёма куба через дифференциал функции $V(x)$ даст достаточно точный результат.

Полагаем $x_0=10$, тогда $\Delta x=0{,}03$.

$$\Delta V\approx dV=\left(x^3\right)'\cdot\Delta x=\left(3x^2\right)\cdot\Delta x$$
$$\Delta V\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0{,}03}}\approx\left(3\cdot 10^2\right)\cdot 0{,}03=9 \quad \text{(см}^3\text{).}$$

Ответ: $\Delta V\approx 9$ см^3.

4) На сколько увеличится при нагревании объём шара, радиус которого равен 10 см, если удлинение радиуса шара равно 0,02 см ?

Обозначим:

x - радиус шара;

Δx - изменение радиуса шара.

Объём куба можно представить как функцию $V(x)=\frac{4}{3}\pi x^{3}$.

Поскольку изменение ребра куба мало, приближённое вычисление изменения объёма шара через дифференциал функции $V(x)$ даст достаточно точный результат.

Полагаем $x_0=10$, тогда $\Delta x=0,02$.

$$\Delta V\approx dV=\left(\frac{4}{3}\pi x^{3}\right)'\cdot\Delta x=4\pi x^{2}\cdot\Delta x$$

$$\Delta V\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0,02}}\approx 4\pi\cdot 10^{2}\cdot 0,02=8\pi\approx 25,133 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\Delta V\approx 25,133$ см^3.

5) Найти, на сколько увеличится площадь квадрата при увеличении его стороны на 0,01 см, если сторона квадрата равна 5 см.

Обозначим:

x - сторона квадрата;

Δx - изменение стороны квадрата.

Площадь квадрата можно представить как функцию $S(x)=x^{2}$.

Поскольку изменение стороны квадрата мало, приближённое вычисление изменения площади квадрата через дифференциал функции $S(x)$ даст достаточно точный результат.

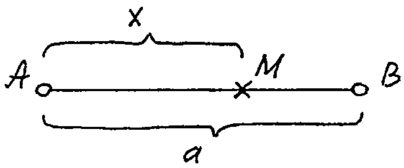
Полагаем $x_0=5$, тогда $\Delta x=0,01$.

$$\Delta S\approx dS=\left(x^{2}\right)'\cdot\Delta x=2x\cdot\Delta x$$

$$\Delta S\Big|_{\substack{x=5\\ \Delta x=0,01}}\approx 2\cdot 5\cdot 0,01=0,1 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $\Delta S\approx 0,1$ см^2.

6) На прямолинейном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку M, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)



Освещённость в точке M от источника A составляет $s_A = \frac{p}{x^2}$;

освещённость в точке M от источника B составляет $s_B = \frac{q}{(a-x)^2}$.

Суммарное освещение в точке M:

$$s(x) = s_A + s_B = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2}$$

Найдём экстремумы функции $s(x)$ на промежутке $(0;a)$.

$$s'(x) = \left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2}\right)' = \left(px^{-2} + q(a-x)^{-2}\right)' = -2px^{-3} - 2q(a-x)^{-3} \cdot (-1) = -\frac{2p}{x^3} + \frac{2q}{(a-x)^3}$$

$$s'(x) = 0$$

$$-\frac{2p}{x^3} + \frac{2q}{(a-x)^3} = 0$$

$$\frac{q}{(a-x)^3} = \frac{p}{x^3}$$

$$(a-x)^3 = \frac{q}{p} x^3$$

$$a - x = \sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot x$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot x + x = a$$

$$x \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{q}{p}} + 1\right) = a$$

$$x = \frac{a}{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{q}{p}}\right)}$$

Найденная точка является точкой минимума функции, т.к. из формулы $s(x) = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2}$ видно, что в момент начала удаления от любого источника освещённость от него резко падает, в то время как доля освещённости от другого источника прибывает сначала медленно.

Ответ: освещённость слабее всего будет в точке, удалённой от источника a на расстояние $x = \frac{a}{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{q}{p}}\right)}$.

7) Линеаризовать функцию $f\left(x,y,z\right)=e^{5x+6y}+\sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$ в окрестности точки $M_0\left(-6;5;1\right)$.

Линеаризовать функцию $f\left(x,y,z\right)$ в окрестности точки $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ - значит приближённо представить её в виде:

$$f\left(x,y,z\right)\approx f\left(x_0,y_0,z_0\right)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{M_0}\cdot\left(x-x_0\right)+\left.\frac{df}{dy}\right|_{M_0}\cdot\left(y-y_0\right)+\left.\frac{df}{dz}\right|_{M_0}\cdot\left(z-z_0\right)$$

Значение функции $f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0:

$$f\left(-6;5;1\right)=e^{5\cdot(-6)+6\cdot5}+\sin\left(\frac{-6+5+1}{5}\right)=e^0+\sin0=1+0=1$$

Частные производные функции $f\left(x,y,z\right)$:

$$\frac{df\left(x,y,z\right)}{dx}=\left(e^{5x+6y}+\sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)\right)'_x=5e^{5x+6y}+\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

$$\frac{df\left(x,y,z\right)}{dy}=\left(e^{5x+6y}+\sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)\right)'_y=6e^{5x+6y}+\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

$$\frac{df\left(x,y,z\right)}{dz}=\left(e^{5x+6y}+\sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)\right)'_x=\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

Частные производные функции $f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{M_0}=5\cdot e^{5\cdot(-6)+6\cdot5}+\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{-6+5+1}{5}\right)=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$$

$$\left.\frac{df}{dy}\right|_{M_0}=6\cdot e^{5\cdot(-6)+6\cdot5}+\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{-6+5+1}{5}\right)=6+\frac{1}{5}=\frac{31}{5}$$

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{M_0}=\frac{1}{5}\cdot\cos\left(\frac{-6+5+1}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

Линеаризованное представление функции $f\left(x,y,z\right)=e^{5x+6y}+\sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$ в окрестности точки $M_0\left(-6;5;1\right)$:

$$f\left(x,y,z\right)\approx1+\frac{26}{5}\cdot\left(x+6\right)+\frac{31}{5}\cdot\left(y-5\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(z-1\right)=$$

$$=1+\frac{26}{5}x+\frac{26\cdot6}{5}+\frac{31}{5}y-\frac{31\cdot5}{5}+\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}=$$

$$=\frac{26}{5}x+\frac{31}{5}y+\frac{1}{5}z+1$$

Ответ: $f\left(x,y,z\right)\approx\frac{26}{5}x+\frac{31}{5}y+\frac{1}{5}z+1$.