1) Вывести формулу производной функции $y = \log_a x$.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \log_a x$$

$$y(x+\Delta x) = \log_a (x+\Delta x)$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

Следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left[\begin{array}{l} \frac{\Delta x}{x} = t \\ \Delta x \to 0: \ \ t \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \log_a \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

2) Найти производную функции $y = \sqrt{14^x}$, пользуясь лишь определением производной.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \sqrt{14^x} = 14^{\frac{x}{2}}$$

$$y(x+\Delta x) = 14^{\frac{x+\Delta x}{2}}$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = 14^{\frac{x+\Delta x}{2}} - 14^{\frac{x}{2}} = 14^{\frac{x}{2}} \cdot 14^{\frac{\Delta x}{2}} - 14^{\frac{x}{2}} = 14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(14^{\frac{\Delta x}{2}} - 1\right)$$

Следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(14^{\frac{\Delta x}{2}} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} \cdot \ln 14\right)}{\Delta x} = \frac{\ln 14}{2} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$$

(при вычислении предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$).

3) Найти производную функции $y = \sin(19x)$, пользуясь лишь определением производной.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x)=\sin(19x)$$
$$y(x+\Delta x)=\sin(19\cdot(x+\Delta x))$$
$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\sin(19\cdot(x+\Delta x))-\sin(19x)=2\cos\left(\frac{38x+\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{19\cdot\Delta x}{2}\right)$$

Следовательно

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(19x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{19\cdot\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(19x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{19\cdot\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{19\cdot\Delta x}{2}\right)}\cdot 19=\cos(19x)\cdot 1\cdot 19=19\cdot\cos(19x)$$

(при вычислении предела использованы:

тригонометрическая формула $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

и первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$)

4) Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt[3]{x}$.

По определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$$
$$y(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=\frac{\left((x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left((x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left((x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}=$$
$$=\frac{(x+\Delta x)-x}{\left((x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}=\frac{\Delta x}{\left((x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

Следовательно

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left((x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}=\frac{1}{0+0+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Заметим, что областью определения функции $y=\sqrt[3]{x}$ является $D(y)=R$, но в точке $x=0$ она не является дифференцируемой, т.к. $f'(0)=+\infty$.

5) Найти производную функции:

$$y=\frac{3x^2-3}{(x-1)}$$

$$y'=\left(\frac{3x^2-3}{(x-1)}\right)'=3\cdot\left(\frac{x^2-1}{(x-1)}\right)'=3\cdot\frac{\left(x^2-1\right)'\cdot(x-1)-\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{2x\cdot(x-1)-\left(x^2-1\right)}{(x-1)^2}=3\cdot\frac{2x-(x+1)}{(x-1)}=3\cdot\frac{2x-x-1}{(x-1)}=3\cdot\left(\frac{x-1}{x-1}\right)$$

Или так:

$$y'=\left(\frac{3x^2-3}{(x-1)}\right)'=3\cdot\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)'=3\cdot\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)'=\left[\frac{x-1}{x-1}=1=\text{const } при\ x\neq 1\right]=$$

$$=3\cdot\left(\frac{x-1}{x-1}\right)\cdot(x+1)'=3\cdot\left(\frac{x-1}{x-1}\right)$$

А такое решение требует уточнения области определения производной функции:

$$y'=\left(\frac{3x^2-3}{(x-1)}\right)'=3\cdot\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)'=3\cdot\left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\right)'=3$$

Функция $y(x)$ не определена в точке $x=1$, и, следовательно, бессмысленно говорить и о её производной в этой точке.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 167.

6) Найти производную функции $f(x)=\dfrac{x^3\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\cos x}{\sqrt{x}}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$; найти $f'(0)$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\cos x}{\sqrt{x}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)'=\left(x^3-\cos x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)'=3x^2+\sin x+0=3x^2+\sin x$$

Область определения функции $f(x)$: $x>0$, поэтому для данной функции не существует её производной в точке $x=0$. Строго говоря, результат следует записать в виде

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2+\sin x \\ x>0 \end{cases}$$

Или

$$f'(x)=\frac{3x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\sin x.$$

$f'(0)$ не существует.