

## Задача 16

В 2015 году задача 16 (ранее задача C2) без изменения тематики (Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин. Координаты и векторы.) стала содержать два пункта с требованиями «доказать» и «найти». Каждый из пунктов независимо оценивался 1 баллом.

Задача 16 предполагала:

– владение как стереометрическими понятиями (такими как пирамида, высота пирамиды, перпендикулярность прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью и др.) так и планиметрическими (в частности, понятием прямоугольного треугольника, определениями тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника и др.), а также фактами, связанными с этими понятиями;

– умение изображать пирамиду, проводить дополнительные построения, направленные на изображение и поиск угла между прямой и плоскостью;

– знание признаков перпендикулярности прямой и плоскости и умение их использовать при решении задачи;

– знание обратной теоремы Пифагора и умение ею воспользоваться в нужной ситуации;

– владение навыками нахождения угла по значению тригонометрической функции при выполнении вычислительной составляющей решения.

Приведем один из примеров задачи 16:

В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 3$  и  $BC = 4$ .

Длины боковых ребер пирамиды  $SA = \sqrt{7}$ ,  $SB = 4$  и  $SD = \sqrt{23}$ .

а) Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .

## Типичные ошибки в решениях задачи 16

1. Самой распространенной ошибкой при решении задачи 16 в 2015 году была неверная трактовка признака перпендикулярности прямой и плоскости: учащиеся (упрощая себе задачу) считали достаточным доказать перпендикулярность рассматриваемой прямой только одной прямой плоскости для того, чтобы утверждать перпендикулярность прямой и плоскости. В то время, как признак гласит «Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости». В итоге доказательство в пункте а) было неполным и оценивалось 0 баллов.

Пример 1.

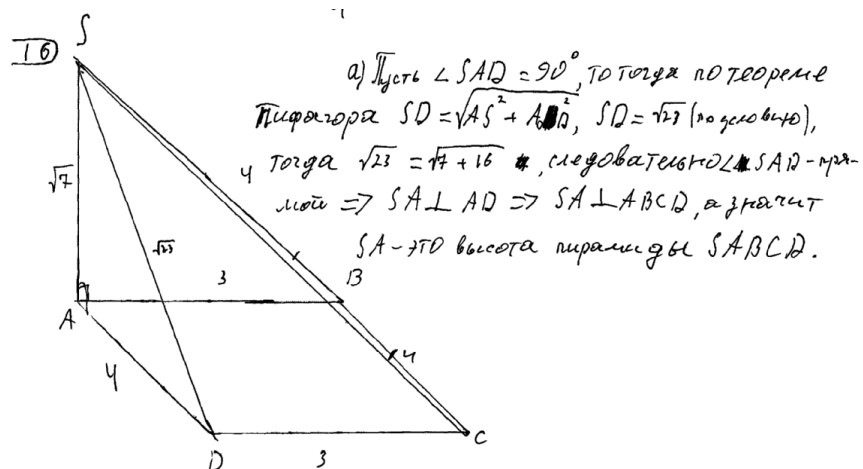


Рис. 11.1.

Комментарии: В решении пункта а) задачи 16 на рисунке 11.1. содержится типовая ошибка, заключающаяся в незнании (или неверном понимании) признака перпендикулярности прямой и плоскости. Рассмотрение одного треугольника и доказательство его прямоугольности с помощью обратной теоремы Пифагора, дает основание утверждать только перпендикулярность прямой  $SA$  и  $AD$ , чего недостаточно для заключения перпендикулярности прямой  $SA$  и плоскости  $ABCD$ . Решение пункта б) отсутствует. Оценка в таком случае – 0 баллов.

2. Неверное определение искомого угла между прямой и плоскостью (неверный переход к планиметрической задаче) стало также одно из наиболее распространенных типовых ошибок при выполнении пункта б) задачи 16. Процедура определения угла между прямой и плоскостью требует особых рассуждений и дополнительных построений (проекция прямой на плоскость). Однако, многими учащимися искомым угол между прямой и плоскостью был определен интуитивно, без необходимых умозаключений, что, чаще всего, было ошибочным и сводило все решение пункта б) к 0 баллов.

Пример 2.

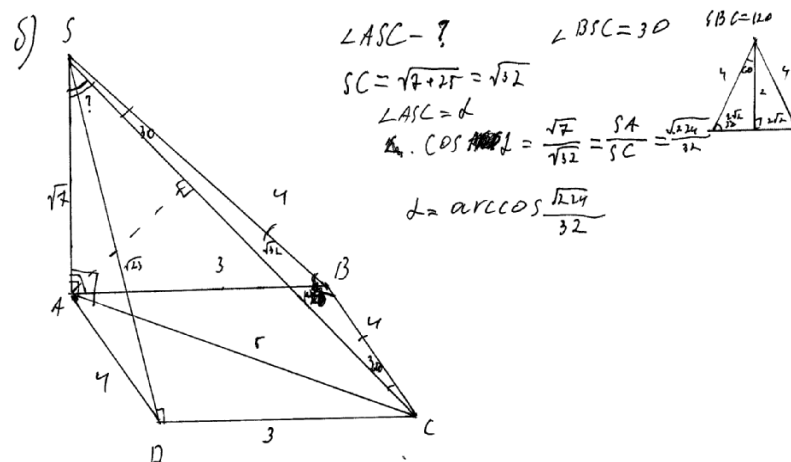


Рис.11.2.

Комментарии: Решение пункта б) задачи 16 на рисунке 11.2. оценено 0 баллов, т.к. искомым углом между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$  определен неверно. Учащимся даже предпринята попытка построения искомого угла по всем правилам – проведен перпендикуляр (видимо, с целью построения проекции прямой на плоскость), но, к сожалению, не из точки  $C$ , а из точки  $A$ . Это говорит о том, что у учащегося есть некоторое общее представление об угле между прямой и плоскостью, но недостаточно полное. Часто в решениях пункта б) отсутствовали необходимые дополнительные

построения искомого угла, а сам угол просто констатировался (неверно) учащимся без каких-либо пояснений. Все эти случаи сводились к 0 баллов.

3. Распространенным недостатком в решении задачи 16 было отсутствие теоретических ссылок и обоснований логических переходов. Учащиеся не указывают используемую для вывода теорию: определения, теоремы, признаки, свойства и т.д.

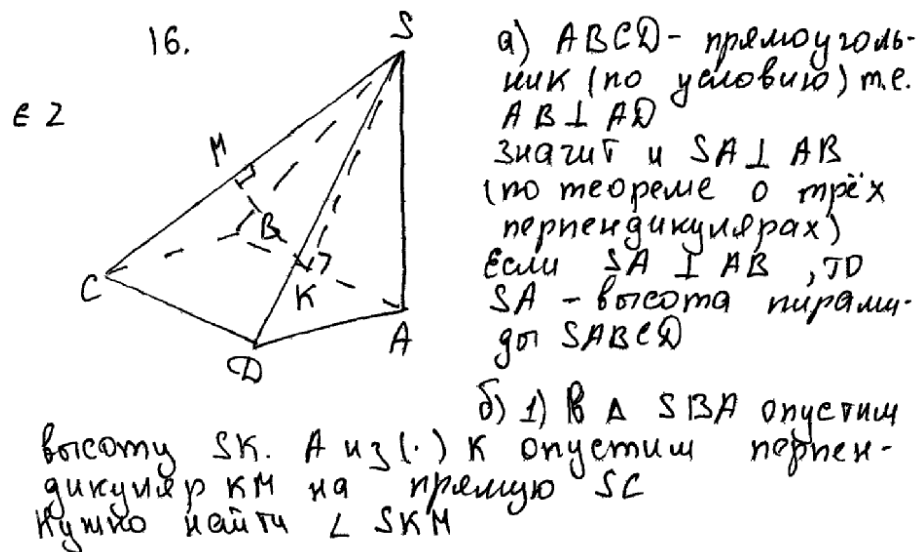


Рис.11.3.

Комментарии: В доказательстве учащимся приводятся некоторые обоснования выводов, в частности, ссылка на теорему о трех перпендикулярах, но основания для этого не приведены. Кроме того, в доказательстве обоснована перпендикулярность рассматриваемой прямой и только одной прямой плоскости, чего недостаточно использования признака перпендикулярности прямой и плоскости. Оба пункта не выполнены, оценка – 0 баллов.

Следует отметить, что по сравнению с 2015 годом при решении задачи 16 улучшилась ситуация с указанием верного ответа. В 2014 году одной из распространенных ошибок было в ответ на требование «Найдите угол между...» выписывание значения одной и тригонометрических функций, используемых в решении, что вело к потере баллов, т.к. решение признавалось незавершенным. В 2015 году таких ошибок практически не было.

Еще одним достоинством решений задачи 16 в 2015 году было активное использование учащимися нестандартных (для школьного курса геометрии) способов решения (в том числе, координатный, координатно-векторный способы). Также можно констатировать увеличение количества работ с оригинальным решением задачи 16. Приведем примеры некоторых из них.

16

Дано:  
 $SABCD$  - пирам.  
 $ABCD$  - трапеция.  
 $AB = CD = 4$   
 $BC = AD = 3$   
 $SA = \sqrt{11}$   
 $SB = 3\sqrt{3}$   
 $SD = 2\sqrt{5}$   
 а) Док-те:  $SA$  - высота пирам.  
 б)  $\angle(SC; (ASB)) = ?$

б) Введем прямоугольную систему координат ( $AB \perp AD$ ;  $AS \perp AB$ ;  $AS \perp AD$ ) ( $AS \perp (ABC)$ )  
 $A(0|0|0)$ ;  $B(4|0|0)$ ;  $C(3|4|0)$ ;  $D(0|4|0)$ ;  $S(0|0|\sqrt{11})$   
 $\vec{SC} = (3; 4; -\sqrt{11})$   
 $|\vec{SC}| = \sqrt{9+16+11} = \sqrt{36} = 6$   
 $(SAB) \equiv Oxy \Rightarrow (SAB): x=0 \rightarrow \vec{n}_{(SAB)} = (0; 1; 0) / |\vec{n}| = 1$   
 $d = \angle(SC; (ASB))$   
 $\sin d = \frac{|\vec{SC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{SC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow d = 30^\circ$

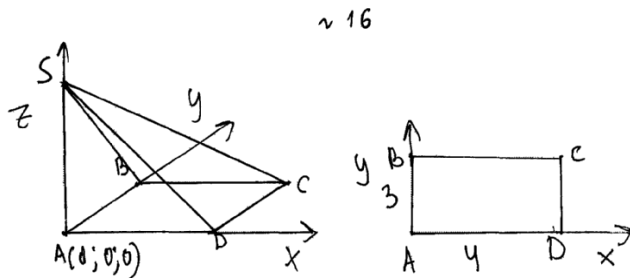
Ответ:  $30^\circ$

Решение:

а)  $\Delta SAB: SB^2 = SA^2 + AB^2$   
 $9 \cdot 3 = 11 + 16$   
 $27 = 27 \Rightarrow$  гипотенуза  
 $\Rightarrow \Delta SAB$  - прямоугольный;  
 $SB$  - гипотенуза;  $\angle SAB = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow SA \perp AB$   
 $\Delta SAD: SD^2 = SA^2 + AD^2$   
 $4 \cdot 5 = 11 + 9$   
 $20 = 20 \Rightarrow$  гипотенуза  
 $\Rightarrow \Delta SAD$  - прямоугольный;  
 $SD$  - гипотенуза;  $\angle SAD = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow SA \perp AD$   
 $SA \perp AD = A$   
 $SA \perp AB = A$   
 $BA \perp AD = A$   
 $ABC(ABC)$   
 $AD \subset (ABC)$   
 $\Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow SA$  - высота пирам.

Рис. 11.4.

Комментарии: В решении на рисунке 11.4. угол найден с помощью координатного метода. Грамотно введен вектор  $\vec{n}$ . Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б). Оценка – 2 балла.



~ 16

Дано:  
 SABCD - пирамида  
 AB = 3  
 BC = 4  
 SA =  $\sqrt{7}$   
 SB = 4  
 SD =  $\sqrt{23}$   
 а) Доказать, что SA - высота пирамиды  
 б)  $\angle(SC; ASB) = ?$

Решение

а) Предположим, что SA действительно высота данной пирамиды. Тогда  $\triangle SAB$  и  $\triangle SAD$  - прямоугольные. Если они являются тансовыми, то верные равенства. Если нет, то верные равенства. Итак, в  $\triangle SAB$  по теореме Пифагора:  $SB^2 = SA^2 + AB^2$   
 $16 = 7 + 9$  - это верное равенство означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник.  
 Аналогично, рассмотрим  $\triangle SAD$ :  $SD^2 = SA^2 + AD^2$ ;  
 $23 = 7 + 16$  - это верное равенство означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник.  $\Rightarrow SA \perp AB$  и  $SA \perp AD$ , а значит, перпендикулярна плоскости основания ( $SA \perp \text{пл. } ABCD$ )  $\Rightarrow$   
 SA - высота пирамиды SABCD, что и требовалось доказать. закона координат Т.А  
 б) Введем систему координат x, y, z. Тогда точки имеют следующие координаты: C(4; 3; 0), S(0; 0;  $\sqrt{7}$ ), A(0; 0; 0), B(0; 3; 0).

Найдем уравнение плоскости через определитель:  
(ASB)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0\sqrt{7} & \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

~~$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \end{vmatrix}$$~~

Уравнение плоскости ASB имеет вид:  $-3\sqrt{7}x$   
 Найдем координаты вектора SC:  $(4-0; 3-0; 0-\sqrt{7})$   
 ; SC(4; 3;  $-\sqrt{7}$ )

Найдем  $\sin(\angle SC; ASB)$  по формуле:  $\frac{|xA + yB + zC|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

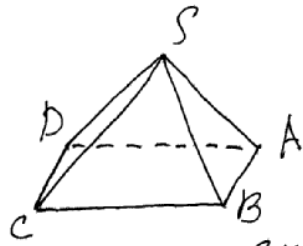
$$= \frac{|4 \cdot -3\sqrt{7}|}{\sqrt{16 + 9 + 7} \cdot \sqrt{(-3\sqrt{7})^2}} = \frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{12}{3\sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4\sqrt{32}}{32} = \frac{\sqrt{32}}{8}$$

$\angle(SC; ASB) = \arcsin \frac{\sqrt{32}}{8}$   
 Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{32}}{8}$

~ 17

Рис.11.5.

Комментарии: Решение на рисунке 11.5. достаточно грамотное. Для нахождения уравнения плоскости по трем точкам учащийся демонстрирует умение работать с определителем, несвойственное школьному курсу математики. Хотя ответ не преобразован, не приведен к эталонному 450, он является правильным. Оценка – 2 балла.



Дано: ~~ABCD~~ SABCD-параллелограмм

ABCD-прямоугольник

$AB=3 \quad BC=4 \quad SA=\sqrt{7} \quad SD=\sqrt{23} \quad SB=4$

а) SA-высота

б)  $\widehat{SCASB}$

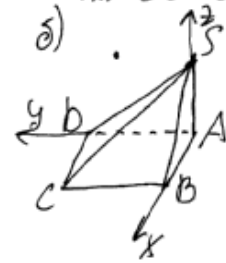
см. на обороте

а) По теореме косинусов по закону  $\angle SAB$  и  $\angle SAB$

$$\cos \angle SAB = \frac{7+9-16}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$$

$$\cos \angle SAB = \frac{7+16-23}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 4} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$$

т.к.  $\angle SAB = \angle SAB = 90^\circ$ ,  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ -высота



~~уравнение~~

$A(0;0;0) \quad S(0;0;\sqrt{7})$

$C(3;4;0) \quad B(3;0;0)$

~~уравнение~~

$\overline{SC}(3;4;-\sqrt{7})$

$d = (ASB) = Ax + By + Cz + D$

$\begin{cases} D=0 & A=0 \\ \sqrt{7}C+D=0 & C=0 \\ 3A+D=0 & D=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{7}C+D=0 & C=0 \\ 3A+D=0 & D=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3A+D=0 & D=0 \end{cases}$

$d = y \quad A=0 \quad B=1 \quad C=0 \quad D=0$

$h(0;1;0)$

~~уравнение~~

$\sin \widehat{SCASB} = \frac{|\overline{SC} \cdot \overline{h}|}{|\overline{SC}| \cdot |\overline{h}|} = \frac{4}{\sqrt{9+16+7} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\widehat{SCASB} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$



### **Рис. 11.6.**

*Комментарии:* К оригинальным решениям можно отнести доказательство перпендикулярности прямой и плоскости с помощью теоремы косинусов, представленное на рисунке 11.6. Угол между прямой и плоскостью найден также нестандартным для школьного курса математики методом координат. Все рассуждения достаточно обоснованные и верные. Оценка – 2 балла.