2015

2016

Подготовка к ЕГЭ по математике 2016

Теория для решения Задач 7

Александр и Наталья Крутицких
www.matematikalegko.ru

2015 2016

Уважаемые друзья! Статьи с подробными решениями заданий ЕГЭ по математике вы можете найти на сайте

http://matematikalegko.ru

На блоге имеются рубрики:

Векторы

Вероятность

Вписанный угол

Графики и диаграммы

Движение

Координатная плоскость

Площади фигур

Преобразование выражений

Производная и первообразная

Прогрессия

Уравнения

Проценты

Работа

Физические задачи

И другое…

Делитесь с коллегами и друзьями.

Рекомендую!

Материалы для подготовки к ЕГЭ по математике ЕГЭ-Студия.

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

Обучение онлайн – ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады Библиотека курсов Фоксворд

Для решения данной группы задач необходимо знать:

- таблицу производных и правила дифференцирования
- геометрический смысл производной
- свойства производной для исследования функций
- физический (механический) смысл производной

Уважаемые друзья, излагать всю теорию в чистом виде из учебника мы не будем. Материал постарались высторить так, чтобы понятна была суть.

Таблица производных и правила дифференцирования.

Правила дифференцирования:

$$(f+g)'=f'+g'$$

$$(f-g)'=f'-g'$$

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

Если с — произвольная постоянная (число):

$$c'=0$$

$$(c\cdot f)'=c\cdot f'$$

В задачах понадобится знание далеко не всех производных элементарных функций, а только первые шесть, но мы приведём всю таблицу (слева функция, справа её производная):

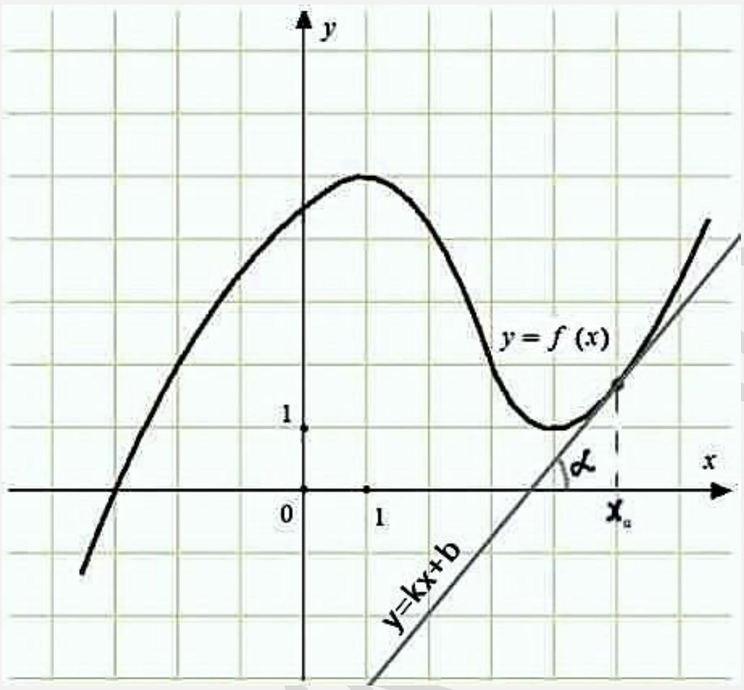
matematikalegko.ru

Таблица производных

f (x) (функция)	f'(x) (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Геометрический смысл производной.

Построим произвольный график некой функции $y = f(x)$ на координатной плоскости, построим касательную в точке x_0, обозначим угол между прямой о осью *ox* как α (альфа):



Из курса алгебры известно, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

ЗАПОМНИТЬ! **Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке. В этом и состоит *геометрический смысл* производной.**

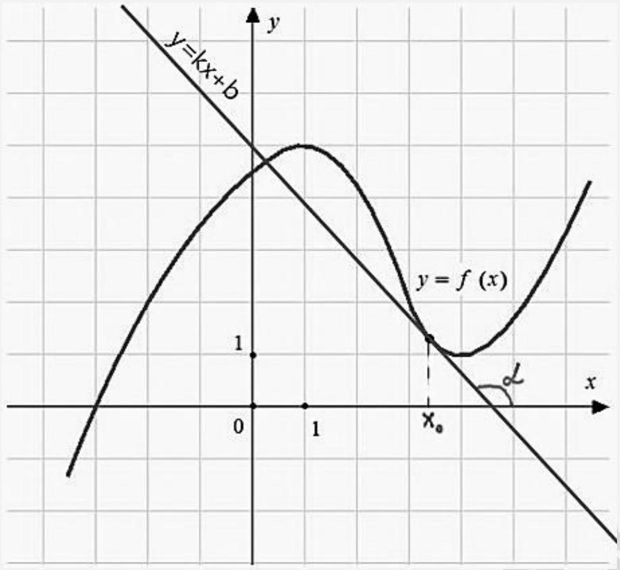
То есть производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной:

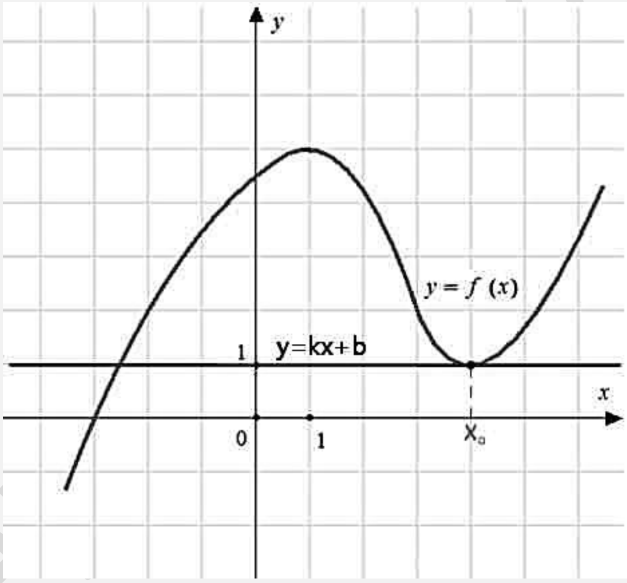
$$y' = f'(x) = k$$

А угловой коэффициент в свою очередь равен тангенсу угла α (альфа), то есть:

$$y' = f'(x) = k = tg\ \alpha$$

В зависимости от того, через какую точку графика проходит касательная, угол α может быть меньше или больше $90°$. Проиллюстрируем, два случая, когда угол больше 90 градусов, и когда равен нулю градусов (случай, когда $\alpha < 90°$ паказан выше):





По свойству тангенса:

при $0° < \alpha < 90°$ $tg\ \alpha$ имеет положительное значение (значит производная имеет положительное значение)

при $\alpha = 0°$ $tg\ \alpha$ равен нулю (значит производная равна нулю)

при $90° < \alpha < 180°$ $tg\ \alpha$ имеет отрицательное значение (значит производная имеет отрицательное значение)

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о свойстве производной для исследования поведения функции… (далее)

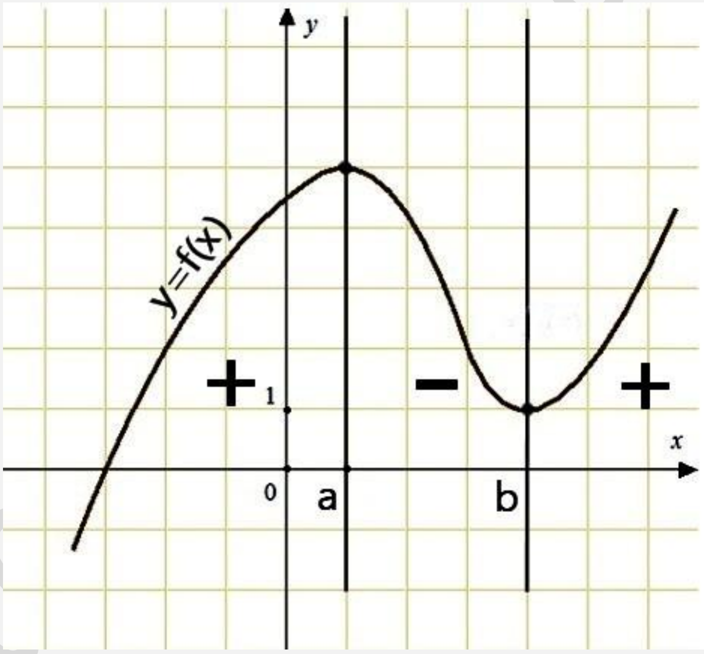
Свойства производной для исследования функций

Что такое возрастание и убывание вы поймёте интуитивно.

Если значение производной в определённой точке из некоторого интервала имеет положительное значение $(0° < \alpha < 90°)$, то график функции на этом интервале возрастает.

Если значение производной в определённой точке из некоторого интервала имеет отрицательное значение $(90° < \alpha < 180°)$, то график функции на этом интервале убывает.

Вышеизложенные свойства необходимы для исследования поведения функции на возрастание и убывание.



Точки, в которых функция меняет своё поведение с возрастания на убывание (и наоборот, с убывания на возрастание), называются экстремумами. Их ещё называют точками максимума (минимума) функции. Производная в этих точках равна нулю. Касательные в этих точках параллельны оси *ox*.

Таким образом, вычислив производную и приравняв её к нулю можно найти точки, которые разбивают числовую ось на интервалы. На каждом из этих интервалов можно определить знак производной и далее сделать

matematikalegko.ru

вывод о её возрастании или убывании. Функция в точках, где производная равна нулю меняет свой знак не всегда.

Какие выводы мы можем сделать, когда дан график функции?

1. Можем определить интервалы возрастания (убывания) функции, знак производной на этом интервале.
2. Можем определить точки максимума (минимума) функции (если задан масштаб), их количество.
3. Можем определить количество экстремумов.
4. Можем определить количество точек, в которых производная равна нулю.
5. Количество касательных к графику функции, параллельных оси *ox*
6. Количество касательных, параллельных какой-либо данной касательной.
7. Значение производной функции в некоторой точке, если даны две точки, через которые проходит касательная.

Какие выводы мы можем сделать, когда дан график производной функции?

1. Можем определить интервалы, на которых функция возрастает (убывает).
2. Точки минимума (максимума) функции.
3. Количество точек минимума (максимума) функции.
4. Количество экстремумов функции.
5. Можем определить точки, в которых функция приобретает максимальное (минимальное) значение на заданном интервале.

И другое.

matematikalegko.ru

Физический (механический) смысл производной.

Пусть задан закон движения материальной точки $x(t)$ вдоль координатной оси, где x координата движущейся точки, t – время.

Скорость в определённый момент времени – это производная координаты по времени. В этом и состоит *механический смысл* производной.

$$V(t) = x'(t)$$

Аналогично, *ускорение – это производная скорости по времени*:

$$a(t) = v'(t)$$

Таким образом, физический смысл производной это скорость. Это может быть скорость движения, скорость изменения какого либо процесса (например роста бактерий), скорость совершения работы (и так далее, прикладных задач множество).

matematikalegko.ru